ISTITUTO LOMBARDO - ACCADEMIA DI SCIENZE E LETTERE

CARLO FELICE MANARA

PASSATO E PRESENTE NELLA METODOLOGIA DELLA SCIENZA

Estratto da
« Aspetti e momenti del rapporto passato-presente nella Storia e nella Cultura »

Istituto Lombardo di Scienze e Lettere

—

MILANO
1977

TIPOGRAFIA FUSI - PAVIA
9/1977

CARLO FELICE MANARA

PASSATO E PRESENTE NELLA METODOLOGIA DELLA SCIENZA

1. - Forse la mia conferenza è la sola di questo ciclo che riguardi le scienze che vengono comunemente dette scienze della natura e quelle che vengono chiamate scienze esatte. Pertanto il compito che mi sta davanti appare particolarmente gravoso, perché è difficile oggi, in una sola conferenza, esporre le idee fondamentali del metodo di queste scienze. Si aggiunga alla gravità del compito il fatto che io non sono nè uno storico nè un filosofo della scienza: sono soltanto un matematico il quale ha cercato di riflettere sui metodi e sul significato della propria scienza, e sull'influenza che questa ha avuto ed ha ancora sulle scienze della natura.

Mi limiterò quindi a trattare questi aspetti del problema ed anche questo lo farò in modo sommario, perché una trattazione completa ed esauriente richiederebbe ben altro tempo e ben più vasta competenza.

Prima di iniziare la mia breve esposizione vorrei soffermarmi un momento su quello che si potrebbe chiamare l'aspetto umanistico della matematica. Ritengo che valga la pena di accennare a questo, perché, nella mente dell'uomo della strada (anche in quello che per altri versi è intelligente e colto) la matematica è fissata attraverso una immagine che ne fa una scienza astratta e quasi mummificata; un scienza che adotta delle definizioni rigorose, dei simboli abbastanza strani, delle regole che appaiono spesso oscure e mal giustificate.

Questa immagine, che resta nella mente dell'uomo della strada dopo l'incontro con la matematica avvenuto durante la propria carriera scolastica, nasce forse dal fatto che l'insegnamento della matematica, per esplicare tutto il suo carattere formativo, deve presentare questa scienza appunto come astratta e rigorosa, deve allenare all'uso dei simboli artificiali, al calcolo che non ammette errori. Tuttavia accanto a questa esposizione, che — ripeto — deve essere di questo genere per ottenere tutto il suo risultato formativo, si dovrebbe poter presentare anche la evoluzione storica della matematica, gli stimoli pratici e culturali che hanno dato luogo al suo sviluppo. Ancor più raramente viene presentato il momento euristico della matematica, il procedimento psicologico che porta alla nascita dei suoi risultati sotto questi stimoli di cui si diceva; quindi colui che non percorre la strada della matematica superiore ignora quanto di fantasia, di pensiero creativo, di inventiva, di intuizione stia alla base della formazione del pensiero matematico. Pensiero la cui nascita invece richiama spesso l'analogia con la creazione dell'opera poetica.

Ho accennato poco fa agli stimoli pratici e culturali che favoriscono la nascita della scoperta matematica; a questo proposito viene ripetuta frequentemente l'aneddottica relativa alla genesi della geometria, fatta risalire alla necessità che gli egiziani avevano di ripartire le terre dopo le inondazioni del Nilo. Ma molti altri sarebbero gli spunti da presentare a proposito di questa influenza dell'ambiente storico sulla nascita del pensiero matematico; come pure interessantissimi sarebbero i problemi che riguardano la influenza delle scoperte matematiche sull'ambiente sociale dell'epoca in cui si verificarono. Basti un solo esempio a questo proposito: si pensi alla influenza che ha avuto sul mondo occidentale la importazione della convenzione di rappresentazione dei numeri interi con cifre arabe, convenzione che ancora oggi è utilizzata per gli usi civili di tutti i paesi. I vantaggi che questa rappresentazione presenta, di fronte alla convenzione utilizzata dai romani, sono testimoniati dalla rapida diffusione di questi metodi, dalla loro adozione da parte di tutti i paesi, man mano che essa venga conosciuta. Si potrebbe addirittura dire che questa diffusione ha segnato anche l'inizio di un nuovo modo di pensare scientifico, perché ha messo lo strumento matematico alla portata della scienza, originando così quella tendenza alla matematizzazione che è una delle caratteristiche della scienza della natura così come oggi noi la conosciamo.

2. - A questo punto vorrei dedicare qualche riflessione a certi aspetti della maturazione della scienza, che ha preso avvio dalla crisi rinascimentale.

Si suole presentare questa crisi come l'affermazione del metodo sperimentale, la esaltazione del momento empirico di fronte al momento teorizzante della scienza medievale. Non si contano le dissertazioni contro l'aristotelismo, contro l'abitudine dell'« ipse dixit », contro una certa esasperazione libresca della conoscenza, che sarebbe stata vinta dall'avvento dell'empirismo. Non si vuole qui contestare queste considerazioni, che del resto andrebbero dirette più che contro Aristotele, contro un aristotelismo deteriore, tipico degli epigoni che — come molto spesso avviene — hanno deformato il pensiero genuino del maestro in modo tale da far dire a Galileo che Aristotele, se fosse stato presente, avrebbe dato ragione a lui piuttosto che ai dotti che si dicevano suoi allievi. Si può tuttavia osservare che esiste un'altra componente della rivoluzione rinascimentale della scienza, componente che potrebbe essere descritta brevemente come la matematizzazione delle scienze della natura. Da un certo punto di vista si potrebbe dire che l'assunzione della matematica a linguaggio principe della scienza è stata codificata da Galileo nel celebre passo del Saggiatore, tanto frequentemente citato ([1]).

Vorremmo tuttavia ricordare che Galileo non è stato il solo a proclamare la necessità della matematizzazione della scienza; ricordiamo il celebre episodio della disputa che B. Pascal ebbe con il N. Noël, superiore dei gesuiti di Parigi, per sostenere la interpretazione che Pascal stesso dava della esperienza di Torricelli ([2]).

E' noto che anche oggi la risalita del mercurio nel tubo vuoto viene ascritta alla pressione dell'aria sulla superficie libera del mercurio stesso; invece la scienza di allora la attribuiva ad un *horror vacui* che la natura avrebbe e che provocherebbe questi ed altri fenomeni.

Naturalmente B. Pascal ha buon gioco contro queste idee, e, contro coloro che sostengono che l'aria non ha peso, si mette addirittura a pesare tutta l'aria che esiste al mondo, e lo fa con un calcolo semplicissimo. Ma ciò che interessa a noi in questa sede è il fatto che il P. Noël non contestava il fatto sperimentale: contestava la spiegazione che B. Pascal dava di questo, e la sua contestazione era basata su argomentazioni che si rifacevano a categorie metafisiche, e del tutto analoga a quella che Manzoni mette in bocca a Don Ferrante per tentare di dimostrare che la peste non esiste. Pertanto la vittoria di B. Pascal in questo caso non è tanto la vittoria del metodo sperimentale, ma la vittoria della spiegazione quantitativa, matematica dei fenomeni.

Oggi l'impiego del linguaggio matematico è talmente diffuso ed abituale, presso alcune scienze almeno (per esempio nella fisica), che addirittura queste scienze non potrebbero sussistere se non facessero uso di tale linguaggio. Tuttavia vale la pena di fare qualche osservazione a proposito dei caratteri che la matematica ha assunto durante la sua storia e soprattutto durante la evoluzione critica che si è verificata negli ultimi cento anni.

Questa evoluzione critica ha dato alla matematica un aspetto che non è forse completamente compreso dall'uomo della strada; questi infatti spesso conserva il concetto della matematica come una scienza che è qualificata dal suo oggetto, dai suoi contenuti. Questo è stato l'atteggiamento comune, almeno fino alla crisi della geometria della seconda metà del secolo XIX; per esempio ancora nella Enciclopedia troviamo la matematica presentata come una scienza determinata dal proprio oggetto, la quantità. Questa concezione traeva sostanzialmente la propria origine dalla trattazione degli Elementi di Euclide, nei quali vengono enunciate certe proposizioni (i postulati) che furono sempre considerate come *evidenti*, almeno fino alla invenzione delle geometrie non euclidee. E questa evidenza, che nel corso di millenni è stata attribuita alle proposizioni iniziali della geometria, veniva appunto considerata nel senso abituale, come aderenza dell'enunciato ad una realtà esistente fuori di noi.

Soltanto la invenzione delle geometrie non euclidee, e la dimostrazione del fatto che queste hanno la stessa consistenza logica della geometria euclidea, costrinse i matematici ad abbandonare il modo di pensare primitivo ed a farsi una nuova concezione della geometria. Questa viene oggi considerata come un sistema ipotetico-deduttivo, nel quale le proposizioni iniziali, che sono enunciate senza dimostrazione, non sono imposte da una evidenza che ci viene dalla osservazione di una realtà esteriore, ma sono scelte con una certa libertà, anche se la scelta è guidata e suggerita dalle nostre esperienze che riguardano la forma, la grandezza, la mutua posizione degli oggetti attorno a noi. Pertanto la validità della costruzione geometrica è garantita soltanto dal rigore della deduzione e dalla solidità dei vincoli logici che legano le proposizioni dedotte a quelle enunciate senza dimostrazione; ma questi fatti non autorizzano affatto a presumere che si dica la *verità* nei riguardi della realtà fisica.

Questo non toglie tuttavia che la geometria abbia una sua validità anche nella sistemazione razionale delle nostre esperienze che riguardano gli oggetti del mondo fisico. In questo secondo atteggiamento la geometria può essere concepita, secondo il detto di un arguto matematico, come il primo capitolo della fisica; essa acquista un posto tra le teorie fisiche e la sua validità non è più quella assoluta, come veniva pensata fino al secolo XVIII, ma diventa la validità in certo modo relativa di una qualunque teoria della fisica: in altre parole una validità che sussiste fino a che un esperimento contrario non viene a costringerci a cambiare la teoria, ed ha significato entro determinati limiti di approssimazione.

Questa crisi della geometria, che abbiamo cercato di esporre brevemente, ha contribuito fortemente a dare alla matematica il suo aspetto attuale, di scienza che non è caratterizzata tanto dai contenuti o dai suoi oggetti, ma piuttosto dai suoi procedimenti ovvero, volendo utilizzare in senso generico una parola che oggi si incontra spesso, dalle sue strutture.

Questa fisionomia della matematica di oggi, insieme con la nascita e la crescita vigorosa di suoi nuovi rami, fà sì che l'oggetto della matematica oggi non può essere limitato alle cose che si dicono *quantificabili*, ma si estende anche a campi che fino a qualche tempo fa parevano sfuggire al suo dominio.

3. - Il carattere della matematica di oggi, che abbiamo cercato di esporre brevemente nelle pagine che precedono, ha una grande influenza anche sulle altre scienze della natura, anche su quelle che potrebbero sembrare più lontane dai metodi e dai procedimenti matematici. Si potrebbe dire che la matematica offre alle scienze di oggi una specie di quadro ideale di metodo e di struttura, quadro al quale le altre scienze cercano di avvicinarsi, in modo più o meno inconscio. Per giustificare queste affermazioni, che potrebbero essere giudicate come dettate da un entusiasmo eccessivo, vorrei soffermarmi su due aspetti della matematica, che la caratterizzano nella sua struttura moderna e che dirigono, in certo senso, la tendenza e la evoluzione anche delle altre scienze.

Il primo di questi aspetti è la utilizzazione di linguaggi artificiali. Questo fenomeno è osservabile nella matematica di tutti i tempi, ma specialmente in quella di oggi; il grande sviluppo dell'algebra astratta, i legami sempre più stretti che vengono messi in evidenza tra certi capitoli della logica e l'algebra stessa, la formalizzazione sempre più generale, formano una caratteristica della matematica di oggi che è di facilissima osservazione.

Orbene abbiamo già detto che la fisica praticamente utilizza il linguaggio matematico in tutti i suoi procedimenti; ma anche la chimica si è costruita in propri simboli nel corso della sua evoluzione storica; e questa tendenza alla costruzione di linguaggi assolutamente univoci la ritroviamo press'a poco in tutte le scienze, anche in quelle che utilizzano finora il solo linguaggio comune, come la medicina, ma che mirano a dare un significato univoco alle parole del linguaggio comune utilizzate, oppure coniano metodicamente delle nuove parole con radici greche o latine per evitare le incertezze, le sfumature, i tranelli del linguaggio comune.

Si potrebbe dire che in tutte le scienze è in atto un procedimento di simbolizzazione il più possibile univoca, procedimento che nella matematica è la regola.

Un secondo aspetto caratteristico che nella matematica si presenta allo stato per così dire puro e che le altre scienze cercano di rendere attuale per quanto possibile è la adozione del metodo assiomatico.

Per evitare equivoci su ciò che intendiamo presentare con questa espressione, vale la pena di dire che, per la matematica, il termine 'assioma' non ha affatto quella caratteristica di 'verità o enunciato evidente di per sé' che viene ad esso attribuito dalla accezione comune; invece ha la caratteristica di proposizione ipotetica, che viene scelta (con qualche fondamento beninteso) come non dimostrata, ma non è imposta da una realtà esteriore. In forma paradossale si potrebbe dire che per il matematico gli assiomi di una teoria (anche diversa da una teoria matematica) sono le sole proposizioni che possono essere discusse: infatti la deduzione dei teoremi diventa (in linea di principio almeno) una applicazione meccanica dei procedimenti logici accettati. Dico in linea di principio perché nella deduzione, che in teoria si riduce ad un calcolo materiale, si manifesta molto spesso la inventiva, la intuizione ed il gusto del ricercatore.

Orbene anche sotto questo punto di vista si potrebbe dire che la tendenza di ogni scienza che voglia presentarsi con un minimo di rigore è quella di distinguere in modo il più possibile accurato il momento della formulazione del sistema di ipotesi (si potrebbe dire il momento della enunciazione degli 'assiomi') dal momento deduttivo, in modo tale che nessuna pretesa o presunta 'evidenza' venga surretiziamente invocata durante il procedimento deduttivo, che non sia stata esplicitamente enumerata tra le cose che si accettano senza dimostrazione o comunque fanno parte delle premesse della teoria.

Si tratta di una esigenza di 'pulizia' metodologica che la matematica realizza per così dire allo stato puro ed alla quale ogni altra scienza cerca di avvicinarsi. Vale anche la pena di ricordare che nella matematica questo risultato viene ottenuto proprio in forza della simbolizzazione, in conseguenza della quale ogni deduzione diventa una specie di 'calcolo' affidato alle leggi formali della sintassi dei simboli adottati.

4. - Per ribadire ulteriormente l'apporto della matematica alla strutturazione del sapere scientifico di oggi vorremmo soffermarci brevemente sulle idee che sono contenute nella celebre 'Dissertazione inaugurale' di F. Klein, che è passata nella storia della scienza sotto il nome di 'Programma di Erlangen' ([3]).

Diverse sono le ragioni per cui ci soffermiamo su questo, che si potrebbe pensare un episodio che merita soltanto l'attenzione degli specialisti. Anzitutto pensiamo che l'episodio sia interessante per il fatto che dà un criterio di classificazione delle varie 'geometrie' esistenti all'epoca, mediante una struttura algebrica relativamente 'nuova' a quei tempi; si tratta della struttura di « Gruppo » sotto la particolare specificazione di « Gruppo di trasformazioni », e si potrebbe cercare in questo episodio una delle radici della maestosa pianta dell'algebra moderna.

Ma si potrebbe ulteriormente pensare che, attraverso le sue considerazioni Klein dava sostanzialmente un criterio, una tecnica per costruire certe *classi di equivalenza* di elementi di un insieme; nel nostro caso questo insieme era quello delle figure geometriche e questa tecnica veniva in sostanza a formalizzare in modo preciso quel concetto di *idea generale* che era restato fino a quel tempo in una specie di vago limbo, almeno per quanto riguarda le esigenze di rigore della matematica.

In sostanza il Klein risolse il problema della classificazione delle geometrie esistenti alla sua epoca ricorrendo alle trasformazioni alle quali una figura geometrica può essere sottoposta senza che cambino le proprietà che interessano lo scienziato.

In altre parole Klein attirò l'attenzione sul fatto che gli oggetti della geometria non sono le figure, ma sono le proprietà che rimangono le stesse (*invarianti* è la parola tecnica) quando si sottopongono le figure a certe manipolazioni che ne cambiano le circostanze accessorie, ma non le caratteristiche essenziali che formano di volta in volta l'oggetto della ricerca.

Si acquistava in certo modo la consapevolezza del fatto che un certo gruppo di trasformazioni corrispondeva ad un certo insieme di proprietà, le quali dànno le 'cose interessanti' di cui la scienza si occupa, al di là dei cambiamenti ai quali la figura può essere sottoposta.

Può essere interessante osservare quanto delle idee che Klein introdusse nella geometria sia passato anche nella fisica ed in particolare nella geometrizzazione che A. Einstein diede di questa scienza.

Non ci interessa qui il problema storico che porterebbe a studiare quanto Einstein abbia coscientemente utilizzato delle idee di Klein, trasferite negli algoritmi di calcolo differenziale assoluto. Da un certo punto di vista sarebbe interessante addirittura poter dimostrare che Einstein non ha voluto coscientemente utilizzare le idee di Klein, le quali dunque si sarebbero così imposte per la loro forza propria. Sta di fatto che la relatività generale di Einstein si presenta come una geometrizzazione della fisica, geometrizzazione che a rigore non era strettamente necessaria per la presentazione della teoria. Vale la pena di ricordare che il linguaggio geometrico utilizzato da Einstein ha provocato notevoli confusioni nei filosofi che hanno tentato di interpretare la teoria einsteiniana; vista a distanza di tempo, l'apparizione di questa teoria sulla scena della fisica ha provato ulteriormente il fatto che il linguaggio matematico non ha un significato diretto ai contenuti, ma ha un significato convenzionale che gli è conferito di volta in volta dalla sua utilizzazione.

Invero non si può concludere che la fisica è ridotta a geometria (come qualcuno ha detto in modo affrettato) per il semplice fatto che la fisica utilizza nei suoi enunciati il linguaggio della geometria differenziale.

La cosa che appare invece a noi più interessante è il fatto che la impostazione della geometria è stata travasata nella fisica. La geometria aveva posto decenni prima il problema della ricerca dei contenuti 'obbiettivi' della geometria, indipendentemente dalle varie convenzioni di scelta dei sistemi di coordinate.

La geometria differenziale aveva elaborato degli strumenti di calcolo per arrivare metodicamente a ricercare ed a esprimere gli 'invarianti' rispetto alle trasformazioni geometriche, invarianti che rappresentano le vere proprietà obbiettive delle figure geometriche e degli enti che si studiano. Pertanto la relatività generale ha semplicemente utilizzato gli strumenti della geometria differenziale (riemanniana nella fattispecie) per la ricerca degli invarianti della fisica. Nella trasposizione fisica delle idee kleiniane si potrebbe dire che ogni osservatore ha un suo sistema di coordinate (spaziali e temporali) con le quali descrive l'universo; ognuna di queste descrizioni risulta essere legittima, ma nessuna ha un significato assoluto, si potrebbe dire *obbiettivo*.

Invero il problema della obbiettività nasce quando si passa dalla rappresentazione che un osservatore dà dei fenomeni fisici alla descrizione che viene fatta da un altro osservatore. Questa trasposizione delle descrizioni è del tutto analoga alla trasformazione delle coordinate in una varietà geometrica. La geometria differenziale fornisce gli strumenti per costruire le proprietà invarianti di fronte a queste trasformazioni di coordinate, in modo da giungere alla espressione di proprietà fisiche.

In questo ordine di idee quindi si potrebbe dire che il significato di assolutezza, cioè di obbiettività degli enunciati della fisica, viene trasferito dalle misure delle singole grandezze alle equazioni che formulano le leggi della fisica, che vengono espresse in forma invariante rispetto alle trasformazioni di coordinate.

5. - Non possiamo addentrarci ulteriormente nella esposizione, perché ciò richiederebbe l'adozione di un linguaggio tecnico; d'altronde abbiamo presentato il caso della relatività generale in certo senso per appoggiare il discorso e per mostrare quanto della metodologia della matematica sia trasferito nelle altre scienze della natura. Non vogliamo iniziare a questo punto una discussione sul tema della unità della cultura, argomento che viene spesso dibattuto con argomenti non sempre convincenti e validi. Ci basti aver cercato di mostrare quanto del pensiero matematico entra nello spirito della scienza di oggi, la quale a sua volta permea tanta parte del nostro modo di pensare e di vivere.

tispecie) per la ricerca degli invarianti della fisica. Nella trasposizione fisica delle idee kleiniane si potrebbe dire che ogni osservatore ha un suo sistema di coordinate (spaziali e temporali) con le quali descrive l'universo; ognuna di queste descrizioni risulta essere legittima, ma nessuna ha un significato assoluto, si potrebbe dire *obbiettivo*.

Invero il problema della obbiettività nasce quando si passa dalla rappresentazione che un osservatore dà dei fenomeni fisici alla descrizione che viene fatta da un altro osservatore. Questa trasposizione delle descrizioni è del tutto analoga alla trasformazione delle coordinate in una varietà geometrica. La geometria differenziale fornisce gli strumenti per costruire le proprietà invarianti di fronte a queste trasformazioni di coordinate, in modo da giungere alla espressione di proprietà fisiche.

In questo ordine di idee quindi si potrebbe dire che il significato di assolutezza, cioè di obbiettività degli enunciati della fisica, viene trasferito dalle misure delle singole grandezze alle equazioni che formulano le leggi della fisica, che vengono espresse in forma invariante rispetto alle trasformazioni di coordinate.

5. - Non possiamo addentrarci ulteriormente nella esposizione, perché ciò richiederebbe l'adozione di un linguaggio tecnico; d'altronde abbiamo presentato il caso della relatività generale in certo senso per appoggiare il discorso e per mostrare quanto della metodologia della matematica sia trasferito nelle altre scienze della natura. Non vogliamo iniziare a questo punto una discussione sul tema della unità della cultura, argomento che viene spesso dibattuto con argomenti non sempre convincenti e validi. Ci basti aver cercato di mostrare quanto del pensiero matematico entra nello spirito della scienza di oggi, la quale a sua volta permea tanta parte del nostro modo di pensare e di vivere.

NOTE

(1) «... la filosofia è scritta in questo grandissimo libro che con. « tinuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma « non si può intender se prima non s'impara a intender la lingua e co- « noscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua mate- « matica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, « senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; « senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto ».

(2) Si vedano la « Réponse de Blaise Pascal au très bon Réverend père Noël » e la « Lettre de Pascal à M. Le Pailleur au sujet du père Noël jésuite ».

(3) F. KLEIN, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Tradotto in italiano da G. FANO col titolo: *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti*, Annali di Mat. pura ed applicata, Serie II, t. XVII (1890).